Métodos Numéricos
30 de abril de 2021
Primer Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Completar apellido en las hojas y numerarlas ☐ Enviar aquí fotos claras y legibles de la resolución ☐ **Justificar todas las respuestas**	Nombre y Apellido *Soto Carlos Miguel*			
	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Nota

1. Consideremos las matrices B y M_ℓ de $n+1 \times n+1$:

$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix}, \qquad M_\ell = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \ell^t & 1 \end{pmatrix}, \quad b, c, \ell \in \mathbb{R}^n, \quad d \in \mathbb{R},$$

siendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular inversible con filas $a_1^t, a_2^t, \ldots, a_n^t$, tal que $\alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \cdots + \alpha_n\, a_n = 7c$, para ciertos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

   (a) Probar que A tiene factorización LU. (10 puntos)

   (b) Probar que $\|M_\ell\|_2 \geq \sqrt{1 + \|\ell\|_2^2}$. (10 puntos)

   (c) Determinar $\ell \in \mathbb{R}^n$ tal que $M_\ell\, B = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Dar explícitamente los valores que forman ℓ. (8 puntos)

   (d) Probar que B tiene factorización LU. Hallarla explícitamente en función de b, c, d, y L, U de la factorización LU de A, y el ℓ obtenido en el ítem anterior. (12 puntos)

2. (a) Probar que los determinantes de las submatrices principales en una matriz simétrica definida positiva son positivos (esta es la recíproca de un ejercicio de la práctica). (10 puntos)

   (b) Sea $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ una matriz simétrica expresada por bloques en la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & u \\ u^t & a \end{pmatrix} \text{ con } A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n},\ u \in \mathbb{R}^n \text{ y } a \in \mathbb{R}$$

      i. Probar que A es definida positiva $\iff$ A_1 es definida positiva y $\det(A) > 0$. (10 puntos)

      ii. Probar que si A admite una descomposición de Cholesky $A = LL^t$ con $L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ v^t & b \end{pmatrix}$ donde $L_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$ entonces $\det(A) = b^2 \det(A_1) \leq a \det(A_1)$. (13 puntos)

3. (a) Sean $V, W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dos matrices inversibles tal que $V^tV = W^tW$. Probar que WV^{-1} es ortogonal. (7 puntos)

   (b) Sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ dos conjuntos linealmente independientes de vectores en $\mathbb{R}^n$. Probar que $v_i^t v_j = w_i^t w_j$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$, si y sólo si existe una matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $w_i = Qv_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. (13 puntos)

   (c) Sea Q una matriz tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n : Q \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$

      i. Probar que Q es ortogonal. (7 puntos)

      ii. Para $n = 2$, ¿es Q una matriz de Givens o de Householder? (10 puntos)